Sélection Internationale
Ecole Normale Supérieure
Epreuve de culture scientifique – Informatique

Session 2005

Durée 4 heures

Premier Exercice

L'ensemble des entiers naturels $0, 1, 2, \ldots$ est noté $\mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $L_n = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ et $T_n = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$. Dans cet exercice une permutation de L_n est un n-uplet $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que l'ensemble des σ_i soit exactement L_n, i.e. $L_n = \{\sigma_i \mid i \in L_n\}$. L'ensemble des permutations de L_n est noté S_n.

Soit φ l'application qui à $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ associe le n-uplet $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in T_n$ où τ_j est le nombre d'entiers naturels $i \in L_j$ tels que $\sigma_i \leq \sigma_j$. Par exemple $\varphi((2, 3, 1, 4)) = (1, 2, 1, 4)$.

Question 1.– Calculer $\varphi((2, 7, 4, 1, 8, 6, 3, 5))$ et écrire en pseudo-code un algorithme de complexité quadratique pour calculer $\varphi(\sigma)$.

Question 2.– Soit $\sigma \in S_n$. Que peut-on dire de σ_n et de $\varphi(\sigma)_n$?

Question 3.– Montrer que φ est une bijection et écrire en pseudo-code un algorithme de complexité quadratique pour calculer $\varphi^{-1}(\tau)$.

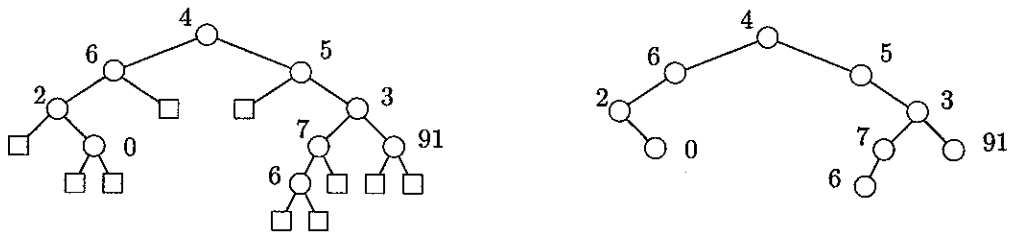


Figure 1: Représentations graphiques de l'arbre binaire $(4, (6, (2, \square, (0, \square, \square)), \square), (5, \square, (3, (7, (6, \square, \square), \square), (91, \square, \square))))$. Dans la représentation de droite les sous-arbres vides ne sont pas représentés.

Dans cet exercice un arbre binaire b est soit l'arbre vide, noté $\square$, soit un triplet $b = (k, b_1, b_2)$ où k est un entier et b_1 et b_2 sont des arbres binaires. Les arbres binaires b_1 et b_2 sont appelés les sous-arbres gauche et droit de l'arbre binaire (k, b_1, b_2). Un sous-arbre de l'arbre binaire b est soit b lui-même soit un sous-arbre de ses sous-arbres gauche et droit. La taille $t(b)$ d'un arbre binaire b est un entier naturel défini inductivement par $t(\square) = 0$ et $t((k, b_1, b_2)) = 1 + t(b_1) + t(b_2)$.

Etant donné un entier naturel a et un arbre binaire b on définit inductivement un nouvel arbre binaire $\text{insert}(a, b)$ comme suit

1. $\text{insert}(a, \square) = (a, \square, \square)$
2. $\text{insert}(a, (a', b_1, b_2)) = (a', \text{insert}(a, b_1), b_2)$ si $a \leq a'$; $(a', b_1, \text{insert}(a, b_2))$ sinon.

Soit $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ une permutation de L_n. On pose $b_0(\sigma) = \square$ et $b_i(\sigma) = \text{insert}(\sigma_i, b_{i-1}(\sigma))$ pour $i = 1, \ldots, n$ et enfin $f(\sigma) = b_n(\sigma)$.

Question 4.– Représenter graphiquement les $f(\sigma)$ pour $\sigma \in S_n$ avec $n \in \{1, 2, 3\}$ ainsi que l'arbre binaire $f((2, 7, 4, 1, 8, 6, 3, 5))$.

Question 5.– Déterminer le nombre de permutations $\sigma' \in S_n$ telles que $f(\sigma') = f(\sigma)$ en fonction des tailles des sous-arbres de $f(\sigma)$.

Deuxième Exercice

Soit $u = u_1 u_2 \dots u_m$ un mot de longueur $m \in \mathbb{N}$ sur un alphabet à n lettres. Le mot u est dit alterné s'il est composé de deux lettres distinctes qui alternent, i.e. (1) $u_1 \neq u_2$, (2) $u_1 = u_3 = u_5 = \cdots$, et (3) $u_2 = u_4 = u_6 = \cdots$. Un sous-mot de u est un mot de la forme $u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k}$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. Un facteur de u est un sous-mot de u de la forme $u_i u_{i+1} u_{i+2} \dots u_{i+j}$ avec $1 \leq i \leq i+j \leq m$.

Le mot u est appelé un mot de Davenport-Schinzel d'ordre $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$, si

1. u n'a pas de facteur de la forme aa où a est une lettre de l'alphabet;
2. u n'a pas de sous-mot alterné de longueur $s+2$.

La longueur maximale d'un mot de Davenport-Schinzel d'ordre s sur un alphabet à n lettres est notée $\lambda_s(n)$.

Question 1.– Montrer que $\lambda_1(n) = n$ et $\lambda_2(n) = 2n - 1$.

Question 2.– Soit u un mot de Davenport-Schinzel d'ordre 3 sur un alphabet à n lettres et soit a une lettre de l'alphabet. Montrer que

$$|u| \leq |u|_a + 2 + \lambda_3(n-1),$$

où $|u|$ est la longueur du mot u et où $|u|_a$ est le nombre d'occurences de la lettre a dans le mot u. En déduire que $\lambda_3(n) = O(n \log n)$. (Indication : appliquer l'inégalité précédente à toutes les lettres de l'alphabet et faire apparaître le nombre harmonique $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$.)

Soit $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ une famille de n fonctions numériques continues définies sur l'intervalle $[0,1]$ dont les graphes $G_i = \{(x, f_i(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\}$ sont sécants deux à deux en au plus s points, i.e. $G_i \cap G_j$ est un ensemble fini à au plus s éléments. Un élément de $G_i \cap G_j$ est appelé un point de transition.

On note $\min \mathcal{F}$ la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = \min_i f_i(x)$. Une représentation R de $\min \mathcal{F}$ de longueur m est la donnée d'une suite $j_1, j_2, \dots, j_m$ de m entiers et d'une suite croissante de $m+1$ réels $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ telles que pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$ on ait $f(x) = f_{j_i}(x)$. On note $U_R(\mathcal{F})$ le mot $f_{j_1} f_{j_2} \dots f_{j_m}$ sur l'alphabet à n lettres $\mathcal{F}$. Une représentation de $\min \mathcal{F}$ est dite minimale si sa longueur est minimale.

Question 3.– Expliquer pourquoi il existe une unique représentation minimale de f.

On note $U(\mathcal{F})$ le mot $U_R(\mathcal{F})$ associé à la représentation minimale R de $\min \mathcal{F}$.

Question 4.– Montrer que $U(\mathcal{F})$ est un mot de Davenport-Schinzel d'ordre s sur l'alphabet $\mathcal{F}$.

On suppose que s est une contante, que la représentation minimale d'une sous-famille de 2 fonctions f_i est calculable en temps constant et que les absicces de deux points de transitions sont comparables en temps constant.

Question 5.– On pose $\mathcal{F}_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{f_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \dots, f_n\}$. Expliquer comment calculer la représentation minimale de $\min \mathcal{F}$ à partir des représentations minimales de $\min \mathcal{F}_1$ et $\min \mathcal{F}_2$. En déduire un algorithme de calcul de la représentation minimale de $\mathcal{F}$ de complexité $O(\lambda_s(n) \log n)$.

Question 6.– Montrer que pour tout mot de Davenport-Schinzel d'ordre s sur un alphabet à n lettres il existe une collection $\mathcal{F}$ de n fonctions numériques continues définies sur l'intervalle $[0,1]$ de graphes sécants deux-à-deux en au plus s points telle que $U(\mathcal{F}) = u$. En déduire que $\lambda_s(n) \leq 1 + sn(n-1)/2$.

Troisième Exercice

Exercice conseillé aux candidats de la discipline secondaire

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini X est noté $|X|$. On rappelle que $\binom{n}{m}$ dénote le nombre de sous-ensembles à m éléments d'un ensemble fini à n éléments.

Question 1.– Montrer que pour a, b entiers naturels, $a \geq b$, on a $(a-b+1)^b \leq b!\binom{a}{b} \leq a^b$.

Soient M et N deux ensembles finis à m et n éléments, A un sous-ensemble de $M \times N$ et s, t deux entiers non nuls. On suppose que A ne contient aucun sous-ensemble de la forme $X \times Y$ avec $|X| = s$ et $|Y| = t$.

Pour $x \in N$ on note $\mathrm{d}(x)$ le nombre d'éléments $z \in M$ tels que $(z, x) \in A$.

Question 2.– Montrer que $|A| = \sum_{x \in N} \mathrm{d}(x)$.

Question 3.– Montrer que

$$\sum_{x \in N} \binom{\mathrm{d}(x)}{s} \leq (t-1)\binom{m}{s},$$

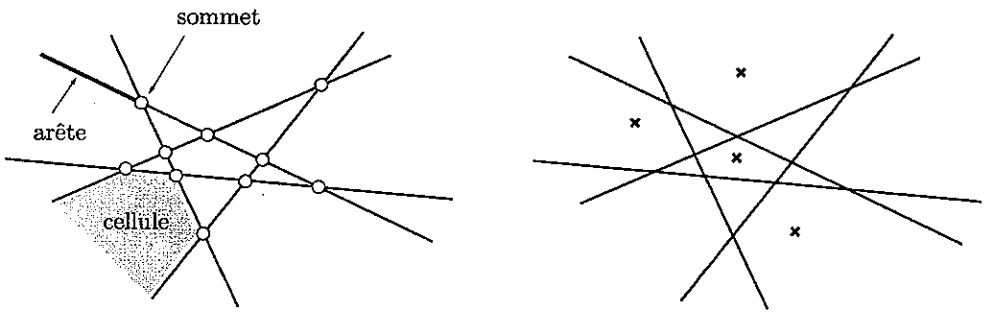
et en déduire que $\sum_{x:\mathrm{d}(x) \geq s} (\mathrm{d}(x) - s + 1)^s \leq (t-1)m^s$.

Question 4.– Montrer que $|A| \leq (s-1)n + n^{1-1/s}(t-1)^{1/s}m$. (Indication : appliquer l'inégalité de Hölder-Minkowski $\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^p)^{1/p}(\sum b_i^q)^{1/q}$ avec $1/p + 1/q = 1$ afin d'utiliser la question précédente.)

Question 5.– Montrer que

$$|A| \quad = \quad O(\min\{mn^{1-1/s} + n, nm^{1-1/t} + m\})$$

sous l'hypothèse que $s, t \in O(1)$.



Soit L un ensemble de n droites du plan $\mathbb{R}^2$ en position générale (i.e. il n'y a pas de paire de droites parallèles et pas de triplet de droites concourantes). Un sommet de L est le point commun à deux droites de L. Une arête de L est une composante connexe de l'union des droites de L privée de l'ensemble des sommets de L. Une cellule de L est une composante connexe du plan $\mathbb{R}^2$ privé des droites de L. La complexité d'une cellule est le nombre d'arêtes incluses dans son bord.

Question 6.– Quels sont les nombres de sommets, d'arêtes et de cellules de L? Quelle est la somme des complexités des cellules de L?

Soit M un ensemble de m cellules de L. On note $K(M, L)$ la somme des complexités des m cellules de M. Dans l'exemple ci-dessus où les cellules de M sont marquées d'une croix on a $K(M, L) = 4 + 4 + 5 + 4 = 17$.

Soit N l'ensemble des $2n$ demi-plans définis par les n droites de L et soit $A \subseteq M \times N$ défini par $(\mu, \nu) \in A$ si
(-1) la cellule μ est incluse dans le demi-plan ν,
(-2) le bord du demi-plan ν contient une arête de la cellule μ.

Question 7.– Montrer qu'il n'existe pas de $X \subseteq M$, $|X| = 2$ et de $Y \subseteq N$, $|Y| = 3$, tels que $X \times Y \subseteq A$. En déduire que $K(M, L) = O(mn^{1/2} + n)$ et montrer que cette borne est atteinte lorsque $m = O(n^{1/2})$ pour un choix judicieux de L et M.

Sélection Internationale
Ecole Normale Supérieure
Epreuve de culture scientifique – Informatique

Session 2004

Durée 4 heures

First Exercice

The set of natural numbers $0, 1, 2, \ldots$ is denoted $\mathbb{N}$.

For $n \in \mathbb{N}$ we set $L_n = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq n\}$ and $T_n = L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$. In this exercice a permutation of L_n is a n-tuple $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{N}^n$ such that the set of σ_i is exactly L_n, i.e., $L_n = \{\sigma_i \mid i \in L_n\}$. The set of permutations of L_n is denoted S_n.

Let φ be the map that assigns to $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ the n-tuple $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \in T_n$ where τ_j is the number of natural numbers $i \in L_j$ such that $\sigma_i \leq \sigma_j$. For example $\varphi((2,3,1,4)) = (1,2,1,4)$.

Question 1.– Compute $\varphi((2,7,4,1,8,6,3,5))$ and describe in pseudocode a quadratic time algorithm to compute $\varphi(\sigma)$.

Question 2.– Let $\sigma \in S_n$. What can be said of σ_n and $\varphi(\sigma)_n$?

Question 3.– Show that φ is a bijection et describe in pseudocode a quadratic time algorithm to compute $\varphi^{-1}(\tau)$.

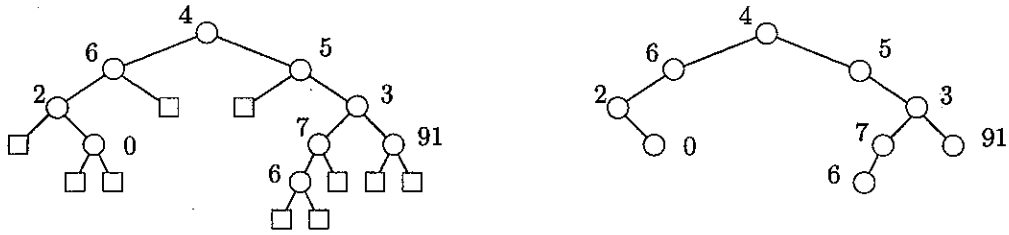


Figure 2: Graphic representations of the binary tree $(4, (6, (2, \square, (0, \square, \square)), \square), (5, \square, (3, (7, (6, \square, \square), \square), (91, \square, \square))))$. The empty subtrees are not represented in the right representation.

In this exercice a binary tree b is either the empty tree, denoted $\square$, either a triple $b = (k, b_1, b_2)$ where k is a natural number and b_1 and b_2 are binary trees. The binary trees b_1 and b_2 are called the left and right subtrees of the binary tree (k, b_1, b_2). A subtree of the binary tree b is either b itself or a subtree of its left and right subtrees. The size $t(b)$ of a binary tree b is the natural number defined inductively by $t(\square) = 0$ and $t((k, b_1, b_2)) = 1 + t(b_1) + t(b_2)$.

Given a natural number a and a binary tree b we define inductively a new binary tree $\text{insert}(a, b)$ as follows

1. $\text{insert}(a, \square) = (a, \square, \square)$
2. $\text{insert}(a, (a', b_1, b_2)) = (a', \text{insert}(a, b_1), b_2)$ if $a \leq a'$; $(a', b_1, \text{insert}(a, b_2))$ otherwise.

Let $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ be a permutation of L_n. We set $b_0(\sigma) = \square$ and $b_i(\sigma) = \text{insert}(\sigma_i, b_{i-1}(\sigma))$ for $i = 1, \ldots, n$ and at last $f(\sigma) = b_n(\sigma)$.

Question 4.– Give graphic representations of the $f(\sigma)$ for $\sigma \in S_n$ with $n \in \{1, 2, 3\}$ and for the binary tree $f((2,7,4,1,8,6,3,5))$.

Question 5.– Express the number of permutations $\sigma' \in S_n$ such that $f(\sigma') = f(\sigma)$ in terms of the sizes of the subtrees of $f(\sigma)$.

Second Exercice

Let $u = u_1u_2\dots u_m$ be a word of length $m \in \mathbb{N}$ over an alphabet with n letters. The word u is said alternate if it is composed of two distinct letters that alternate, i.e., (1) $u_1 \neq u_2$, (2) $u_1 = u_3 = u_5 = \cdots$, and (3) $u_2 = u_4 = u_6 = \cdots$. A subword of u is a word of the form $u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_k}$ with $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$. A factor of u is a subword of u of the form $u_iu_{i+1}u_{i+2}\dots u_{i+j}$ with $1 \leq i \leq i+j \leq m$.

The word u is called a Davenport-Schinzel word of order $s \in \mathbb{N}$, $s \neq 0$, if

1. u has no factor of the form aa where a is a letter of the alphabet;
2. u has no alternate subword of length $s+2$.

The maximal length of a Davenport-Schinzel word of order s over an alphabet with n letters is denoted $\lambda_s(n)$.

Question 1.– Show that $\lambda_1(n) = n$ and $\lambda_2(n) = 2n-1$.

Question 2.– Let u be a Davenport-Schinzel word of order 3 over an alphabet with n letters and let a be a letter of the alphabet. Show that

$$|u| \leq |u|_a + 2 + \lambda_3(n-1),$$

where $|u|$ is the length of u and where $|u|_a$ is the number of occurences of the letter a in the word u. Deduce that $\lambda_3(n) = O(n \log n)$. (Indication : apply the above inequality to the letters of the alphabet and introduce the harmonic number $1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$.)

Let $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ be a family of n numerical continuous functions defined on the interval $[0,1]$ whose graphs $G_i = \{(x, f_i(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1]\}$ intersect pairwise in at most s points, i.e., the number of elements of the set $G_i \cap G_j$ is at most s.

We denote by $\min \mathcal{F}$ the numerical function f defined on the interval $[0,1]$ by $f(x) = \min_i f_i(x)$. A representation R of $\min \mathcal{F}$ of length m is given by a sequence $j_1, j_2, \dots, j_m$ of m natural numbers and an increasing sequence of $m+1$ real numbers $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$ such that for all $x \in [x_{i-1}, x_i]$ one has $f(x) = f_{j_i}(x)$. We denote by $U_R(\mathcal{F})$ the word $f_{j_1}f_{j_2}\dots f_{j_m}$ on the alphabet $\mathcal{F}$. A representation of $\min \mathcal{F}$ is said to be minimal if its length is minimal.

Question 3.– Explain why there is a unique minimal representation of f.

We denote by $U(\mathcal{F})$ the word $U_R(\mathcal{F})$ associated with the minimal representation R of $\min \mathcal{F}$.

Question 4.– Show that $U(\mathcal{F})$ is a Davenport-Schinzel word of order s over the alphabet $\mathcal{F}$.

We assume that s is a constant, that the minimal representation of a sub-family of two functions f_i is computable in constant time, and that the abscissae of two transition points are comparable in constant time.

Question 5.– We set $\mathcal{F}_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_{\lfloor n/2 \rfloor}\}$ and $\mathcal{F}_2 = \{f_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \dots, f_n\}$. Explain how to compute the minimal representation of $\min \mathcal{F}$ from the minimal representations of $\min \mathcal{F}_1$ and $\min \mathcal{F}_2$. Deduce an algorithm to compute the minimal representation of $\min \mathcal{F}$ whose complexity is $O(\lambda_s(n) \log n)$.

Question 6.– Show that for every Davenport-Schinzel word u of order s over an alphabet with n letters there exists a collection $\mathcal{F}$ of n numerical continuous functions defined on the interval $[0,1]$ whose graphs intersect pairwise in at most s points such that $U(\mathcal{F}) = u$. Deduce that $\lambda_s(n) \leq 1 + sn(n-1)/2$.

Third Exercice

Exercice recommended to the candidates of the subsidiary subject

---

The number of elements of a finite set X is denoted $|X|$. We recall that $\binom{n}{m}$ denotes the number of subsets with m elements of a finite set with n elements.

Question 1.– Show that for all a, b natural numbers, $a \geq b$, one has $(a-b+1)^b \leq b!\binom{a}{b} \leq a^b$.

Let M and N be two finite sets with m and n elements, A a subset of $M \times N$, and s, t two nonnul natural numbers. We assume that A contains no subset of the form $X \times Y$ with $|X| = s$ and $|Y| = t$.

For $x \in N$ we denote by $\mathrm{d}(x)$ the number of elements of the set of $z \in M$ such that $(z, x) \in A$.

Question 2.– Show that $|A| = \sum_{x \in N} \mathrm{d}(x)$.

Question 3.– Show that

$$\sum_{x \in N} \binom{\mathrm{d}(x)}{s} \leq (t-1)\binom{m}{s},$$

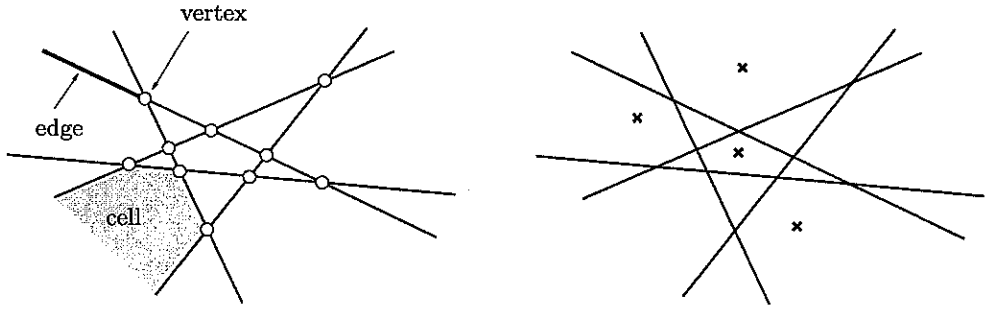
and deduce that $\sum_{x:\mathrm{d}(x) \geq s} (\mathrm{d}(x) - s + 1)^s \leq (t-1)m^s$.

Question 4.– Show that $|A| \leq (s-1)n + n^{1-1/s}(t-1)^{1/s}m$. (Indication : use the Hölder-Minkowski inequality $\sum a_i b_i \leq (\sum a_i^p)^{1/p}(\sum b_i^q)^{1/q}$ with $1/p + 1/q = 1$ in order to use the previous question.)

Question 5.– Show that

$$|A| \;=\; O(\min\{mn^{1-1/s} + n, nm^{1-1/t} + m\})$$

under the assumption that $s, t \in O(1)$.



Let L be a set of n straight lines in the plane $\mathbb{R}^2$ in general position (i.e., no 3 lines have a common point and no 2 are parallel). A vertex of L is the common point of two lines of L. An edge of L is a connected component of the union of the lines minus the vertices of L. A cell of L is a connected component of the plane $\mathbb{R}^2$ minus the lines of L. The complexity of a cell of L is the number of edges included in its boundary.

Question 6.– What are the numbers of vertices, edges, and cells of L? What is the sum of the complexities of the cells of L?

Let M be a set of m cells of L. We denote by $K(M, L)$ the sum of the complexities of the m cells of M. In the above example where the cells of M are marked with a cross one has $K(M, L) = 4 + 4 + 5 + 4 = 17$.

Let N be the set of $2n$ half-planes defined by the n lines of L and let $A \subseteq M \times N$ defined by $(\mu, \nu) \in A$ if
(-1) the cell μ is included in the half-plane ν,
(-2) the boundary of the half-plane ν include an edge of the cell μ.

Question 7.– Show that there exists no $X \subseteq M$, $|X| = 2$ and $Y \subseteq N$, $|Y| = 3$, such that $X \times Y \subseteq A$. Deduce that $K(M, L) = O(mn^{1/2} + n)$ and show that this bound is attained when $m = O(n^{1/2})$ for a suitable choice of L and M.